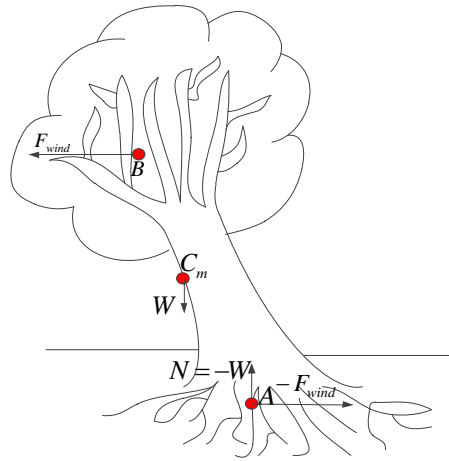


مبحث نوزدهم (مثال درخت در حال وزش باد و مثال سرسره و کودک)

در ادامه‌ی جلسه‌ی قبل، به تحلیل روابط حاکم بر درخت در حالتی که بر اثر وزش باد خمیده شده است و به حالت خمیده باقی مانده است می‌پردازیم. با خم شدن درخت، مرکز جرم آن نیز جابجا می‌شود و فرضاً در جایی که در شکل زیر نشان داده شده است قرار می‌گیرد (مرکز جرم جسم بسته به توزیع جرمی جسم می‌تواند تعیین شود و حتی ممکن است خارج از جسم نیز قرار گیرد ولی اگر جسم محدب باشد مرکز جرم آن داخل جسم قرار می‌گیرد). به دلیل اینکه نقطه اثر نیروی وزن، مرکز جرم است، نیروی وزن را نیز از مرکز جرم به سمت پایین ترسیم می‌کنیم.



نیروی دیگری که به درخت وارد می‌شود از طرف زمین به ریشه‌های آن است. نقطه اثر این نیروها که گشتاور این نیروها حول آن صفر است جایی حول و حوش ریشه‌ها قرار دارد ولی به دلیل اینکه جای دقیق آن را نمی‌دانیم، فرض می‌کنیم مطابق شکل در نقطه‌ی A قرار داشته باشد.

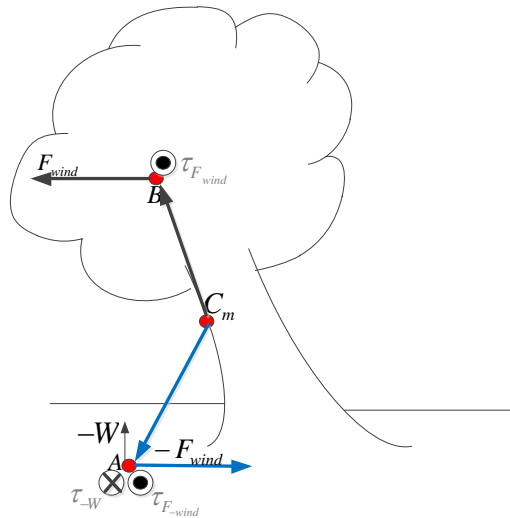
نیروی خارجی دیگر از طرف باد به درخت و خصوصاً به شاخه‌های درخت وارد می‌شود. فرض می‌کنیم باد به صورت یک‌طرفه نیرو وارد می‌کند و نقطه اثرش در B قرار دارد. به دلیل اینکه درخت خمیده مانده است و مرکز جرمش شتابی ندارد و رابطه‌ی $\sum F = M^e a_{C_m} = 0$ برقرار است، باید نیرویی که از طرف زمین به ریشه‌ها وارد می‌شود هم W و هم F_{wind} را جبران کند. بنابراین نیروی $-F_{wind}$ را مطابق شکل روی مرکز اثر نیروهای وارد شونده از زمین به ریشه‌های درخت باید در نظر گرفته و رسم می‌کنیم.

بررسی $\sum F = M^e a_{C_m}$ به تنهایی کفایت نمی‌کند و لازم است رابطه‌ی $\sum \tau = I^e \dot{\omega}$ نیز در مورد درخت تحقیق شود. چون فرض کردیم درخت در حال خمیده ساکن است لذا درخت ω یا $\dot{\omega}$ ندارد. بنابراین

$\sum \tau = 0$ است. رابطه‌ی گشتاور جای نقطه اثر نیروها نسبت به مرکز جرم را توجیه می‌کند. همانطور که می‌دانید گشتاور نیروی وزن حول مرکز جرم صفر است و باید گشتاور نیروهای $-W$ ، F_{wind} و $-F_{wind}$ را حول مرکز جرم بررسی نماییم. بر اساس شکل بالا و جای نقطه اثرها در آن درخت حتماً ω پیدا می‌کند. لذا باید شکل را اصلاح نموده و نقطه اثرها را به گونه‌ای انتخاب کنیم که درخت دورانی پیدا نکند.

بر اساس رابطه‌ی گشتاور یک نیرو حول مرکز جرم جسم، که حاصل ضرب خارجی بردار واصل نقطه اثر آن نیرو تا مرکز جرم در بردار نیرو است، باید توجه کنید که تنها مولفه‌ای از بردار واصل نقطه اثر نیرو به مرکز جرم در رابطه‌ی گشتاور وارد می‌شود که عمود بر راستای نیرو باشد.

اگر در شکل قبل A را آنقدر سمت چپ ببریم که در راستای C_m قرار بگیرد، گشتاور $-W$ نیز حول مرکز جرم صفر می‌شود اما باز هم F_{wind} و $-F_{wind}$ موجب دوران درخت می‌شوند. اما اگر A باز هم بیشتر به سمت چپ برده شود آن‌گاه $-W$ (با جهت درونسو) دورانی که F_{wind} و $-F_{wind}$ (با جهت برونسو) می‌خواهند ایجاد کنند را خنثی می‌کند. جهت گشتاوری که این نیروها ایجاد می‌کنند در شکل بعد نشان داده شده است.

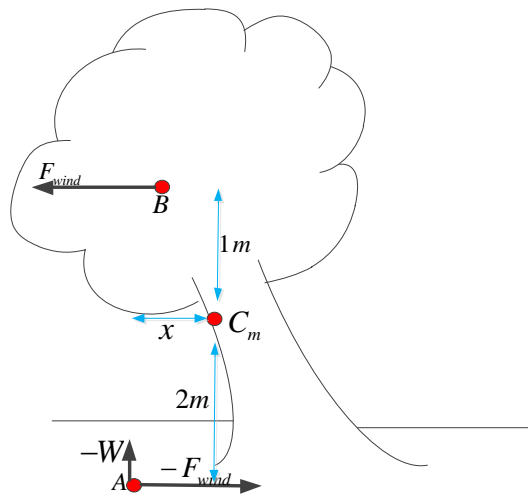


جایجا شدن مرکز اثر نیروهای وارد شونده از زمین به ریشه‌های درخت به این معنی است که نیروهایی که به ریشه‌های سمت چپ درخت وارد می‌شوند بیشتر از نیروهایی هستند که به ریشه‌های سمت راست درخت وارد می‌شوند. به همین دلیل اگر درخت دوران پیدا کند ابتدا زمین ریشه‌های سمت چپی را به راست رانده و آنها نیز ریشه‌های سمت راستی را از خاک بیرون می‌اندازند.

حال برای داشتن درک بهتر می توان این مسأله را به صورت عددی بررسی نمود. فرض کنید نیروی وارد شونده از طرف باد $\frac{1}{5}$ نیروی وزن باشد. فاصله عمودی مرکز جرم تا B یک متر و فاصله عمودی مرکز جرم تا A دو متر باشد. اگر x فاصله افقی مرکز جرم از A باشد (مطابق شکل بعد). مقدار x باید چقدر باشد تا درخت دوران پیدا نکند؟

باتوجه به جهت گشتاور نیروها داریم:

$$\sum \tau = 0 \rightarrow \tau_{F_{wind}} + \tau_{-F_{wind}} - \tau_{-W} = 0 \rightarrow \frac{1}{5}W \times 1 + \frac{1}{5}W \times 2 - W \times x = 0 \rightarrow x = 0.6m$$

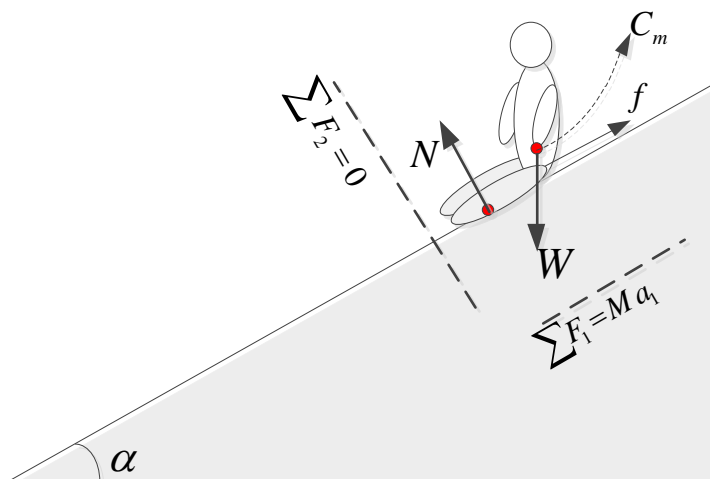


بنابراین فاصله ی نقطه اثر نیروهای وارد شونده از طرف زمین به ریشه های درخت تا مرکز جرم باید 0.6 متر به سمت چپ باشد تا درخت دورانی پیدا نکند.

شاید این سوال مطرح شود که چه کسی به درخت می آموزد که نقطه اثر نیروهایش را تغییر دهد تا از جا کنده نشود. در پاسخ باید به سخنی از حضرت علی (ع) مراجعه کنیم. ایشان فرمودند وقتی می بینید باد نهالی را به رقص در می آورد، دلیلش رقصانیدن نهال نیست بلکه به این دلیل است که نهال یاد بگیرد چگونه مستحکم بایستد. با وزش باد نهال می آموزد که باید ریشه هایش را بیشتر داخل خاک برده و مستحکم تر گردد. این همان راه هدایتی است که خدا به همه مخلوقات و از جمله درخت نشان داده است (الذی خلق فسوی والذی قدر فهدی).

حال به مثال دیگری می پردازیم. می خواهیم برای کودکی که روی سرسره قرار دارد و امکان سر خوردن دارد روابط نیرو و گشتاور نیرو را بررسی کنیم.

در این مثال از مقاومت هوا صرف نظر می کنیم. نیروی اصطکاک را با f نشان می دهیم و در خلاف جهت حرکت وجود دارد. شتاب در راستای حرکت وجود دارد. لذا رابطه ی $\sum F_1 = Ma_{c_m(1)}$ در راستای حرکت برقرار است و در راستای عمود بر حرکت، شتابی نداشته و $\sum F_2 = 0$ است.

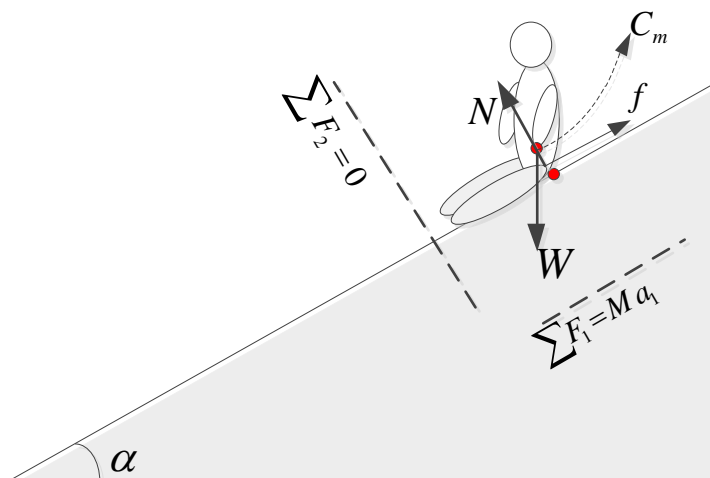


بنابراین اگر اصطکاک وجود نداشته باشد و فرضاً سطح لغزنده باشد، داریم:

$$\sum N_i = N = Mg \cos(\alpha)$$

$$Mg \sin(\alpha) = M a_{c_m} \rightarrow a_{c_m} = g \sin(\alpha)$$

برای بررسی رابطه ی گشتاور، فرض می کنیم کودک حول مرکز جرم دورانی ندارد. گشتاور نیروی وزن که حول مرکز جرم صفر است. بنابراین باید گشتاور N نیز حول مرکز جرم صفر باشد. بنابراین باید نقطه اثر N جایی در راستای مرکز جرم قرار بگیرد تا حاصلضرب خارجی r در N صفر گردد (مطابق شکل بعد).



بنابراین با فرض اصطکاک صفر باید نقطه اثر N و W روی خط عمود بر سطح از مرکز جرم می‌بود تا کودک دوران نکند.

حال فرض کنید اصطکاکی با ضریب اصطکاک 1.5 وجود داشته باشد. ضریب اصطکاک 1.5 به این معنی است که ضریب اصطکاک می‌تواند تا 1.5 افزایش یابد. بنابراین داریم:

$$\sum N_i = N = Mg \cos(\alpha)$$

$$Mg \sin(\alpha) - f = M {}^e a_{cm} \rightarrow Mg \sin(\alpha) - \mu Mg \cos(\alpha) = M {}^e a_{cm}$$

$$\rightarrow {}^e a_{cm} = g \sin(\alpha) - \mu g \cos(\alpha)$$

اگر فرض کنیم زاویه α 30 درجه باشد، آن‌گاه:

$${}^e a_{cm} = g \sin(\alpha) - \mu g \cos(\alpha) = 10 \left(\frac{1}{2} - \mu \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

حال اگر:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577$$

کودک ساکن مانده و شتابی پیدا نمی‌کند. بنابراین با توجه به فرض ضریب اصطکاک 1.5 کودک نمی‌تواند حرکت کند. ولی در ادامه باید رابطه‌ی گشتاور را نیز بررسی نماییم.

ω حول مرکز جرم صفر است و تنها نیروهای اصطکاک و N حول مرکز جرم وجود دارند که می‌توانند موجب دوران کودک شوند یا از آن جلوگیری کنند. بنابراین برای آنکه f نتواند کودک را دوران دهد باید نقطه اثر N جابجا شده و به سمت چپ بیاید تا اثر f را خنثی کرده و مانع از دوران کودک بر اثر اصطکاک شود.

می‌توانید محاسبه کنید نقطه اثر نیروی N چقدر باید از مرکز جرم دور شود تا کودک بر اثر اصطکاک دوران نکند.